Über Plancksche Maßeinheiten und die Verknüpfung von Naturkonstanten im Rahmen des Bohrschen Atommodells.

Rolf Austrup, Hofheim am Taunus 03.11.2006

1) Die Planckschen Maßeinheiten

Bei der quantitativen Beschreibung physikalischer Vorgänge tauchen bestimmte Naturkonstanten auf, wie z.B. die Lichtgeschwindigkeit c, die Gravitationskonstante G, die Planck-Konstante h, die Boltzmann-Konstante k, die Rydberg-Konstante Ry, die Elementarladung e oder die Massen von Elektron m_e oder Proton m_p.

Zwischen diesen Konstanten gibt es eine Reihe von Verknüpfungsrelationen, so dass die Konstanten nicht unabhängig voneinander sind. Man kann bestimmte Kombinationen der Naturkonstanten durch dimensionslose Konstanten darstellen, die dann unabhängig vom gewählten Maßystem sind. Dies soll im folgenden näher erläutert werden.

Es werden zwei Konstanten eingeführt, die eine Relation herstellen zwischen den Planckschen Masse- und Längeeinheiten auf der einen Seite und Elektronenmasse, Protonenmasse und Compton-Wellenlänge auf der anderen Seite.
Die Planckschen Maßeinheiten für die fundamentalen Größen Länge, Zeit, Masse und Temperatur, die für die quantitative Beschreibung der frühen Zeit unseres Universums, also kurz nach dem Urknall, aufgestellt werden, sind

$$l_{Planck} = \sqrt{Gh/c^3} = 4{,}0497 \cdot 10^{-35}\ \text{m} \tag{1a}$$

$$t_{Planck} = \sqrt{Gh/c^5} = 1{,}3508 \cdot 10^{-43}\ \text{s} \tag{1b}$$

$$m_{Planck} = \sqrt{ch/G} = 5{,}4571 \cdot 10^{-8}\ \text{kg} \tag{1c}$$

$$T_{Planck} = \sqrt{c^5 h/G}\,/\,k = 3{,}5518 \cdot 10^{32}\ \text{K} \tag{1d}$$

Dabei ist l_{Planck} die kleinste noch sinnvoll zu definierende geometrische Abmessung. Sie entspricht der Abmessung des als extrem heisser Feuerball mit der Plancktemperatur T_{Planck} existierenden Universums zur Planckzeit, also etwa 10^{-43}s nach dem Urknall.

Unter Einbeziehung der Compton-Wellenlänge $\lambda_c^{(e)} = h / m_e c$, der Compton-Zeit $t_c^{(e)} = \lambda_c^{(e)} / c$, und der elementaren Grundeinheit der Temperatur $T_p = m_p c^2 / k = 1{,}0888 \cdot 10^{13}$ K nach FINKELNBURG und RODEWALD [1] erhält man

$$\boxed{\frac{m_{Planck}}{m_e} = \frac{\lambda_c^{(e)}}{l_{Planck}} = \frac{t_c^{(e)}}{t_{Planck}} = \Phi_e = 5{,}99 \cdot 10^{22}} \tag{2}$$

$$\boxed{\frac{m_{Planck}}{m_P} = \frac{\lambda_c^{(P)}}{l_{Planck}} = \frac{t_c^{(P)}}{t_{Planck}} = \frac{T_{planck}}{T_P} = \Phi_P = 3{,}2626 \cdot 10^{19}} \tag{3}$$

mit $\phi_e / \phi_P = m_P / m_e = 1836$

Damit beschreiben die Konstanten ϕ_e und ϕ_P das Verhältnis der atomaren Größen m_e, m_p, $\lambda_c^{(e)}$, $\lambda_c^{(P)}$, $t_c^{(e)}$, $t_c^{(P)}$ und $T_{(P)}$ für Elektron bzw. Proton zu den Planckschen Maßeinheiten.

Zu den dimensionslosen Naturkonstanten gehören auch die Feinstrukturkonstante

$$\alpha = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 ch} \approx \frac{1}{137} \tag{4}$$

und das Verhältnis von Coulombkraft zu Gravitationskraft zwischen Elektron und Proton

$$\frac{F_C}{F_G} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 G} \cdot \frac{e^2}{m_e m_P} \tag{5}$$

Mit Hilfe der Konstanten ϕ_e und ϕ_P lassen sich beide Konstanten kombinieren.
Aus (4) und (5) zusammen mit (2) und (3) folgt

$$\boxed{\frac{F_C}{F_{G(e,P)}} = \frac{\alpha}{2\pi}\phi_e\phi_P = 2{,}27 \cdot 10^{39}} \tag{6a}$$

Für 2 Protonen gilt dann

$$\boxed{\frac{F_C}{F_{G(P,P)}} = \frac{\alpha}{2\pi}{\phi_P}^2 = 1{,}24 \cdot 10^{36}} \tag{6b}$$

Das Verhältnis der Kräfte F_C und F_G wird hiermit durch die drei Konstanten α, ϕ_e und ϕ_P beschrieben.
Durch Quadrieren des Kehrwertes von m_{Planck} / m_p (3) kommen wir zur Kopplungskonstante der Gravitation [5]:

$$\alpha_G = \frac{G{m_P}^2}{c\hbar} = \frac{2\pi}{{\phi_P}^2} = 5{,}90 \cdot 10^{-39} \tag{6c}$$

Aus (6b) und (6c) folgt dann

$$\boxed{\frac{F_C}{F_{G(P,P)}} = \frac{\alpha}{\alpha_G}} \tag{7}$$

Damit haben wir eine Verknüpfung des Kräfteverhältnisses mit der Kopplungskonstante durch α.

ϕ_e , ϕ_P und α und ihre Kombinationen geben daher wichtige, naturgegebene Verhältnisse von Längen, Zeiten, Massen und Kräften an.

Im folgenden wird die Verknüpfung aller zeitlichen Verläufe von Licht und Elektron im Bohr'schen Atommodell durch die Feinstrukturkonstante abgeleitet. Für die Formulierung von α ergeben sich hiermit neue Varianten. Auf die Umlauffrequenz des Elektrons auf der 1. Bohr'schen Bahn bezogen werden die Rydbergkonstante, die Balmer-Gleichung, die Compton-Wellenlänge und die Energiezustände der Atome vereinfacht und neu formuliert.

2) <u>Die Laufzeiten des Elektrons im Bohr'schen Atommodell</u>

Zunächst werden die Basisgrößen eingeführt, auf die sich die folgenden Ausführungen beziehen:

- Comptonwellenlänge $\bar{\lambda}_c = \hbar / m_e c$
- Feinstrukturkonstante $\alpha = e^2 / 4\pi\varepsilon_0 \hbar c \approx 1/137$
- klassischer Elektronenradius $r_e = e^2 / 4\pi\varepsilon_0 m_e c^2$

In diese Basisgrößen gehen die Naturkonstanten e, m_e, c, h, ε_0 ein.

Die Gleichungen für den Umfang der Elektronenkreisbahn U um das Proton im Bohr'schen Atommodell des H-Atoms und den Umfang des Elektrons sind nach SCHRÖDINGER und DIRAC [2]:

$U = 2a_0\pi = \lambda_c / \alpha$ und (8)

$2r_e\pi = \alpha\lambda_c$ (9)

Gleichung (8) ist aus dem Bohr'schen Radius $a_0 = \lambda_c / 2\pi\alpha$ abgeleitet.

Aus (8) und (9) folgt für die Größe des klassischen Elektronenradius

$r_e = \alpha^2 a_0$ (10)

Zusammen mit der Geschwindigkeit des Elektrons

$v_e = \alpha \cdot c$ und der Compton-Zeit

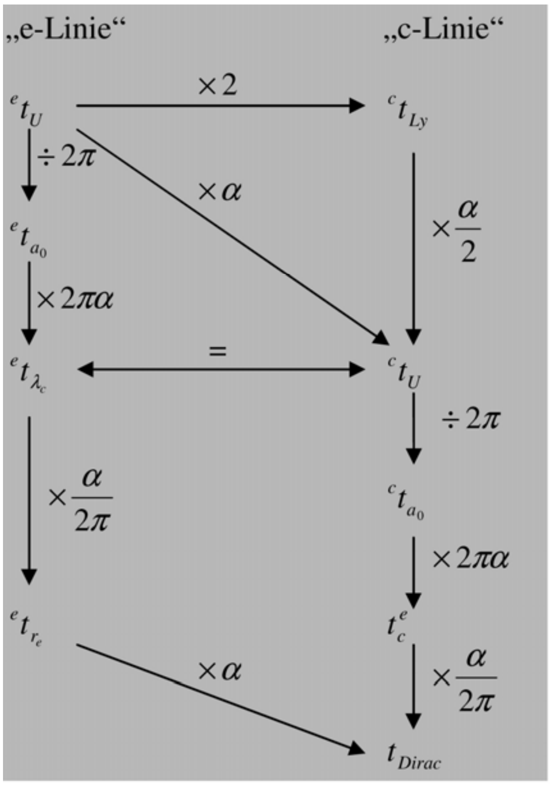
$t_c^e = \lambda_c / c$

werden folgende Laufzeiten ${}^e t$ des Elektrons errechnet, für

- die Kreisbahn U:	${}^e t_U = t_c^e / \alpha^2$	$= 1{,}5198 \cdot 10^{-16}$ s	(11a)
- den Bohr'schen Radius a_0:	${}^e t_{a_0} = t_c^e / 2\pi\alpha^2$	$= 2{,}4171 \cdot 10^{-17}$ s	(11b)
- die Compton-Wellenlänge λ_c:	${}^e t_{\lambda_c} = t_c^e / \alpha$	$= 1{,}1088 \cdot 10^{-18}$ s	(11c)
- den klassischen Elektronenradius r_e:	${}^e t_{r_e} = t_c^e / 2\pi$	$= 1{,}2880 \cdot 10^{-21}$ s	(11d)

Des weiteren können die Zeiten ${}^c t$ errechnet werden, die das Licht braucht, um eine Strecke von der Größe U, a_0, λ_c und r_e zu durchlaufen.

Die Verknüpfung der Zeiten durch α und 2π zeigt das folgende Schema:



Laufzeiten [s]

10^{-16}

10^{-17}

10^{-18}

10^{-19}

10^{-21}

10^{-24}

Es folgt hieraus $\alpha = \sqrt[3]{2\pi \cdot t_{Dirac} / {}^e t_U}$ mit dem Verhältnis der längsten Zeit ${}^e t_U$ zur kürzesten Zeit $t_{Dirac} = 9{,}3998 \cdot 10^{-24}\,s$ [3], wobei t_{Dirac} die Zeit ist, die das Licht braucht, um eine Strecke zurückzulegen, die gleich dem klassischen Elektronenradius ist.

Es folgt des weiteren

$$\alpha = 2\pi \frac{t_{Dirac}}{t_c^e} = 2\pi \frac{r_e}{\lambda_c^e} \tag{12}$$

Die Feinstrukturkonstante wird hier durch das Verhältnis zweier charakteristischer Zeiten und Längen ausgedrückt. Auf ${}^c t_{Ly} = \lambda_{Ly} / c$ mit der Grenzwellenlänge λ_{Ly} der Lyman-Serie (siehe obiges Zeitschema) werden wir später zurückkommen.

Die Verknüpfung der Längen durch α, die aus (8) und (9) abgeleitet wird, ist unter Einbeziehung der Rydbergkonstante $Ry = \alpha^2 / 2\lambda_c$ und der Grenzwellenlänge $\lambda_{Ly} = 1/Ry$ [4] in folgendem Schema zusammengefasst:

$$\frac{1}{Ry} = \lambda_{Ly} \xrightarrow{x\alpha/4\pi} a_0 \xrightarrow{x2\pi\alpha} \lambda_c \xrightarrow{x\alpha/2\pi} r_e \xrightarrow{x4\pi/\alpha^3}$$

10^{-8} 10^{-11} 10^{-12} 10^{-15} Länge [m]

Die Kreisfrequenz des Elektrons wird in der Literatur beschrieben durch

$$\omega_n = \frac{Z^2 m_e e^4}{n^3 (4\pi\varepsilon_0)^2 \hbar^3}$$

Im folgenden wird eine vereinfachte Form abgeleitet. Zusammen mit
$e^4 / (4\pi\varepsilon_0)^2 \hbar^2 c^2 = \alpha^2$ und $m_e c^2 / h = 1/\alpha^2 \cdot {}^e t_U$ (11a) folgt daraus für das H-Atom mit Z=1 die Kreisfrequenz

$$\omega_n = \frac{2\pi}{n^3 \cdot {}^e t_U} \quad s^{-1}$$

und die Umlaufzeit des Elektrons auf der n-ten Bohr'schen Bahn

$${}^e t_n = n^3 \cdot {}^e t_U \qquad (13)$$

Mit n=1 ist die größte Kreisfrequenz $\omega_1(H) = 4{,}1342 \cdot 10^{16} s^{-1}$.
Mit Einführung der Umlauffrequenz des Elektrons auf der 1. Bohr'schen Bahn $\upsilon_{(n=1)} = 1/{}^e t_U$ wird aus der obigen Gleichung für die Kreisfrequenz

$$\boxed{\omega_n = \frac{2\pi \cdot \upsilon_{(n=1)}}{n^3}} \qquad (14)$$

3) Die Compton-Wellenlänge λ_c

Aus dem Bohr'schen Radius $a_0 = \bar{\lambda}_c / \alpha$ (8) und dem klassischen Elektronenradius

$r_e = \alpha \cdot \bar{\lambda}_c$ (9) erhält man

$$\boxed{\bar{\lambda}_c = \sqrt{a_0 r_e}} \qquad (15)$$

Hiermit wird die Compton-Wellenlänge durch die Längen a_0 und r_e beschrieben.
Mit der Möglichkeit der experimentellen Bestimmung der Zahlenwerte von λ_c und a_0 kann demzufolge mit (15) der klassische Elektronenradius errechnet werden.

4) Die Rydbergkonstante und die Spektralserien

Die Rydbergkonstante ist definiert durch

$$Ry_\infty = \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0{}^2 h^3 c} = \frac{\alpha^2}{2\lambda_c}$$

Aus $Ry_\infty = \alpha^2 / 2\lambda_c$ erhalten wir mit $r_e = \alpha^2 a_0$ (10) und $\bar{\lambda}_c = \sqrt{a_0 r_e}$ (15)

$$\boxed{Ry_\infty = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{r_e}{a_0^3}}} \qquad (16)$$

Das Einsetzen der Zahlenwerte ergibt $Ry_\infty = 1{,}0973877 \cdot 10^7 m^{-1}$.
Hiermit wird die Rydbergkonstante wie λ_c durch die 2 Längen r_e und a_0 beschrieben.

Eine weitere Variante für Ry wird unter Einführung von ${}^e t_U$ im folgenden gezeigt. Aus $Ry_\infty = \alpha^2 / 2\lambda_c$ leiten wir zusammen mit $\alpha^2 = t_c^e / {}^e t_U$ (11a) und $t_c^e = \lambda_c / c$ ab

$$\boxed{Ry_{\infty} = \frac{1}{2c \cdot {}^{e}t_U} = \frac{\upsilon_{(n=1)}}{2c}} \qquad (17)$$

Die Rydbergkonstante ist hiermit ausgedrückt nur durch die Lichtgeschwindigkeit c und die Laufzeit des Elektrons ${}^{e}t_U$ bzw. die Umlauffrequenz $\upsilon_{(n=1)} = 6{,}5798 \cdot 10^{15}\ s^{-1}$ für den 1. Bohr'schen Kreis und ist damit wesentlich einfacher darstellbar als die Form $m_e e^4 / 8\varepsilon_0{}^2 h^3 c$.

Aus der Balmer-Gleichung

$$\bar{\upsilon} = Ry_{\infty}\left(\frac{1}{S^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

mit der Serienzahl S und der Quantenzahl n folgt mit $Ry = \upsilon_{(n=1)} / 2c$ und $\bar{\upsilon} = 1/\lambda = \upsilon / c$ die Gleichung

$$\boxed{\upsilon = \upsilon_{(n=1)}\left(\frac{1}{2S^2} - \frac{1}{2n^2}\right)} \qquad (18)$$

Damit ist die Frequenz υ der Spektrallinien über die Variablen S und n direkt mit der Umlauffrequenz $\upsilon_{(n=1)} = m_e e^4 / 4\varepsilon_0{}^2 h^3$ des Elektrons auf der Grundbahn verknüpft.
Für die Grenzwellenlänge der Lyman-Serie mit S=1 und $n = \infty$ ist $\lambda_{Ly} = 1/Ry = 911$ Å.
Mit $\lambda_{Ly} = c \cdot {}^{c}t_{Ly}$ und $Ry = 1/(2c \cdot {}^{e}t_U)$ ist dann

$${}^{c}t_{Ly} = 2 \cdot {}^{e}t_U \qquad (19)$$

Damit ist die Durchlaufzeit des Lichtes für die Grenzwellenlänge doppelt so groß wie die Umlaufzeit des Elektrons auf der 1. Bohr'schen Bahn. Mit ${}^{e}t_U \cdot \alpha = {}^{c}t_U$ folgt des weiteren

$${}^{c}t_{Ly} \frac{\alpha}{2} = {}^{c}t_U \qquad (19a)$$

und damit eine Verknüpfung dieser beiden Zeiten durch die Feinstrukturkonstante α, wie im Zeitenschema dargestellt ist.

5) Die Energiezustände der Atome

Für sie gilt:

$$E_n = -\frac{Ry \cdot h \cdot c \cdot Z^2}{n^2}$$

und mit $Ry = \upsilon_{(n=1)} / 2c$ und Z=1 folgt

$$\boxed{E_n = -\frac{h \cdot \upsilon_{(n=1)}}{2n^2} \quad \text{J}} \qquad (20)$$

Für n=1 ist E_1=-13,60 eV. Das entspricht dem tiefsten Energiezustand bzw. der Ionisationsenergie des H-Atoms.

Der Autor dankt Prof. Dr. W. Demtröder/Kaiserslautern sehr herzlich für Anregungen und Kritik

Literatur:

[1] Westphal: Pysikalisches Wörterbuch II, 17 (1952)
[2] SCHRÖDINGER, E. und DIRAC, P.A.M. in R. Rompe u. H. J. Treder: Elementarkonstanten und was sie bedeuten, Akademie-Verlag Berlin, 57 u. 80 (1988)
[3] DIRAC, P.A.M., New Ideas of Space and Time Die Naturwissenschaften 60, 529-531 (1973)
[4] W.Finkelnburg: Einführung in die Atomphysik, Springer Verlag, 68 (1976)
[5] R.H. DICKE, Dirac's Cosmology and Mach's Principle, Nature, Vol. 192, 440-41 (1961)