

Die Balmer-Gleichung ohne Rydbergkonstante und die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante im Sinne von Segrè.

Rolf Austrup, Hofheim am Taunus

20.08.2008

Ausgehend von der Balmer-Formel $\lambda = Bm^2 / (m^2 - 4)$ wird eine modifizierte Gleichung abgeleitet, die direkt zur Frequenz der Spektren führt. Des Weiteren wird über die Feinstrukturkonstante α berichtet, wie sie bereits einige Jahre vor Einführung durch Sommerfeld Gegenstand von Überlegungen hätte sein können.

Zunächst ein kurzer Überblick von Daten, die uns interessieren werden.

1866 Ångström und die vier Wasserstofflinien

1885 Balmer-Gleichung

1888 Rydbergkonstante

1906 Lyman-Serie

1913 Bohrsches Atommodell

1916 Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante

1) Eine modifizierte Balmer-Gleichung

Ångström bestimmt 1866 die Wellenlängen der ersten vier Wasserstofflinien $H_\alpha \dots H_\delta$, aus denen Balmer 1885 seine berühmte Formel

$$\lambda = B \frac{m^2}{m^2 - 4} \quad (1)$$

mit $B = 3645,6 \cdot 10^{-10} [m]$ und $m = 3, 4, 5 \dots$ empirisch ableitet.

Mit Rydberg (1888) folgt nach Einsetzen von $4/B = Ry$ für die Wellenzahl

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = Ry \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (2)$$

Später wird zusammen mit der Lyman-Serie und weiteren Serien die allgemeine Balmer-Gleichung formuliert

$$\bar{\nu} = Ry \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (3)$$

mit $n = 1, 2, 3, \dots$ und $m \geq n + 1$.

Soweit zur Historie der Balmer-Formel.

Wir beschreiten im Folgenden einen neuen Weg zur Ableitung einer Balmer-Gleichung, wobei die Rydbergkonstante nicht erforderlich ist. Wir setzen neben der Balmer-Formel in ihrer ursprünglichen Form nur das Bohrsche Atommodell als bekannt voraus.

Wir führen zunächst in (1) die heutige Terminologie ein und ersetzen B durch die Grenzwellenlänge λ_{GW} , die Zahl $4 = 2^2$ durch n^2 und erhalten

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{n^2}{\lambda_{GW}} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (4)$$

mit $n^2 / \lambda_{GW} [m^{-1}] = \text{const.} = Ry$

Der nächste Schritt ist der Übergang von der Wellenlänge λ zur Frequenz ν :

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{n^2 c}{\lambda_{GW}} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (5)$$

mit $n^2 c / \lambda_{GW} [s^{-1}] = Ry \cdot c = R_\nu$, der heutigen Rydberg-Frequenz. (5a)

Für die Balmer-Serie mit $n = 2$ und $\lambda_{GW} = \lambda_{Ba} = 3645,6 \cdot 10^{-10} m$ ist dann

$$n^2 c / \lambda_{GW} = 3,2894 \cdot 10^{15} \quad (5b)$$

Es ist nahe liegend, nach einer Verknüpfung der Frequenz $n^2 c / \lambda_{GW}$ mit der Umlaufzeit des Elektrons für die 1. Bohrsche Bahn des Wasserstoffatoms

${}^e t_U = 1,5200 \cdot 10^{-16} s$ zu suchen. Mit Einführung des Bohrschen Atommodells (1913)

sind Geschwindigkeit des Elektrons v_e und Bohrscher Atomradius a_0 bekannt,

damit auch der Zahlenwert von ${}^e t_U = 2a_0\pi / v_e = 1,5200 \cdot 10^{-16}$.

Wir finden dann mit (5b):

$$\frac{n^2 c}{\lambda_{GW}} = 3,2894 \cdot 10^{15} = \frac{1}{2 \cdot 1,5200 \cdot 10^{-16}} = \frac{1}{2 \cdot {}^e t_U} \quad (6)$$

Der Kehrwert von ${}^e t_U$ ist die Frequenz $\nu_{(n=1)} = 6,5798 \cdot 10^{15} s^{-1}$.

Es folgt aus (5)

$$v = \frac{v_{(n=1)}}{2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (7)$$

Damit haben wir aus der Balmer-Gleichung (1) ohne Inanspruchnahme der Rydbergkonstante die aus der 1. Publikation bereits bekannte „Frequenzgleichung“ abgeleitet. Wir stellen fest, dass die Frequenz v der Spektrallinien über die Variablen n und m lediglich mit der Umlauffrequenz des Elektrons auf der 1. Bohrschen Bahn verknüpft ist.

Wir erweitern unsere bisherigen Annahmen um die Kenntnis der Feinstrukturkonstante α und der de-Broglie-Wellenlänge λ_D gemäß der Bohrschen Bedingung $2\pi r = n \cdot \lambda_D$.

Für das Wasserstoffatom mit $n=1$ wird $r = a_0$ und $\lambda_D = 2\pi a_0 = 3,3249 \cdot 10^{-10} m$. Es ist dann

$$v_{(n=1)} = \frac{v_e}{2\alpha_0\pi} = \frac{\alpha \cdot c}{\lambda_D} \quad \text{und mit (7)}$$

$$v = \frac{c}{\lambda} = \frac{\alpha \cdot c}{2\lambda_D} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad \text{bzw.}$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\alpha}{2\lambda_D} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (7a)$$

Damit sind die Wellenlängen der Spektrallinien über die Feinstrukturkonstante α mit der de-Broglie-Wellenlänge λ_D verknüpft.

2) Über die Feinstrukturkonstante im Sinne von Segrè.

Emilio Segrè, Nobelpreisträger 1959, schreibt in seinem Buch „Die großen Physiker und ihre Entdeckungen“ [1]: „Immer wieder wurde der Versuch unternommen, die Feinstrukturkonstante aus fundamentalen Überlegungen abzuleiten, aber bis heute sind alle Versuche fehlgeschlagen.“

Das sollte kein Grund sein, sich nicht erneut mit dieser Frage zu befassen.

Wir machen entsprechend Kap.1) folgende Annahmen: die Balmer-Gleichung (1885) und das Bohrsche Atommodell (1913). Die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante α wird erst 1916 eingeführt und soll für unsere Überlegungen noch nicht existieren

Mit dem Bohrschen Atommodell wird über die Energiebilanz die Geschwindigkeit des Elektrons auf der 1. Bohrschen Bahn des Wasserstoff-Atoms mit $v_e = \hbar / m_e \cdot a_0$ berechnet.

Der Zahlenwert ist dann: $v_e = 2,1879 \cdot 10^6 \text{ ms}^{-1}$.

Es ist verwunderlich, dass man nicht alsbald nach Veröffentlichung des Bohrschen Atommodells der nahe liegenden Frage nach dem Verhältnis von v_e zur Lichtgeschwindigkeit c nachgegangen ist. Dabei hätte man bereits 1913 mit der Gleichung $v_e = \alpha \cdot c = 2,1879 \cdot 10^6$ den Faktor $\alpha = 1/137$ berechnen können.

Selbst Sommerfeld [2] formulierte noch 1915/1916 (Zitat) „Ich habe nämlich definiert

früher $\alpha = \frac{\pi^2 e^4}{h^2 c^2}$ jetzt $\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc}$.“

Für die Ableitung von α aus weiteren „fundamentalen Überlegungen“ wollen wir uns auf folgende Längen aus dem atomaren Bereich beziehen:

- klassischer Elektronenradius $r_e = e^2 / 4\pi\epsilon_0 m_e c^2 = 2,8179 \cdot 10^{-15} \text{ m}$
- Bohrscher Atomradius $a_0 = \epsilon_0 h^2 / \pi m_e e^2 = 5,2917 \cdot 10^{-11} \text{ m}$
- Rydbergkonstante $Ry = m_e e^4 / 8\epsilon_0^2 h^3 c = 1,0976948 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$
- Compton-Wellenlänge $\lambda_c = 2,4263 \cdot 10^{-12} \text{ m}$; $\tilde{\lambda}_c = 3,8616 \cdot 10^{-13} \text{ m}$

Bis zum Jahre 1913 sind die wichtigsten Parameter des Wasserstoff-Atoms bekannt: Ry , a_0 und r_e [3]. Wir fragen: gibt es einen gemeinsamen Faktor, der die 3 Konstanten verknüpft? Dazu vergleichen wir r_e , a_0 und Ry dergestalt, dass man zu dimensionslosen Zahlen kommt. Das Ergebnis ist dann:

1. Der Vergleich des klassischen Elektronenradius r_e mit dem Bohr-Radius a_0 ergibt

$$\frac{a_0}{r_e} = \frac{4\epsilon_0^2 h^2 c^2}{e^4} = 18775 \quad (8)$$

Mit der Quadratwurzel erhalten wir

$$\sqrt{a_0 / r_e} = \frac{2\epsilon_0 h c}{e^2} = 137 = 1/\alpha \quad (8a)$$

Damit führt der a_0 / r_e -Vergleich zu dem Zahlenwert 137 und bestätigt die vorher genannte Gleichung $\alpha = v_e / c$. Das wichtigste Ergebnis dieses Vergleichs ist aber, dass aus (8a) bereits die Gleichung für die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante folgt mit

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}$$

2. Der Vergleich von $2a_0\pi$ mit der Rydbergkonstante Ry ergibt

$$2a_0\pi \cdot Ry = \frac{e^2}{4\epsilon_0 hc} = 3,6486 \cdot 10^{-3} = \frac{1}{274} = \frac{1}{2 \cdot 137} = \alpha/2 \quad (9)$$

3. Der Vergleich von $2r_e\pi$ mit Ry führt zusammen mit (8) und (9) zu

$$2r_e\pi \cdot Ry = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^6}{8\epsilon_0^3 h^3 c^3} = \frac{1}{2 \cdot 137^3} = \alpha^3/2 \quad (10)$$

Alle 3 Vergleiche führen zu der kleinsten ganzen Zahl 137 und damit im Sinne von Segrè zu α .

Aus (8) und (9) folgen die heute gebräuchlichen Formeln für den Elektronenradius und für den Bohr-Radius mit

$$r_e = \alpha^2 a_0 \text{ und } a_0 = \frac{\alpha}{4\pi Ry}.$$

Mit dem Wissensstand des Jahres 1913 gibt es also, wie wir sehen, bereits mehrere Wege, die zu der Konstanten α hätten führen können, bevor Sommerfeld 1916 seine Feinstrukturkonstante einführte.

4. Für den Vergleich der seit 1922 bekannten Compton-Wellenlänge λ_c mit r_e und a_0 gilt:

$$\frac{r_e}{\tilde{\lambda}_c} = \frac{2,8179 \cdot 10^{-15}}{3,8616 \cdot 10^{-13}} = 0,0073 = \alpha \quad (11)$$

$$\frac{\tilde{\lambda}_c}{a_0} = \frac{3,8616 \cdot 10^{-13}}{5,2917 \cdot 10^{-11}} = \alpha \quad (11a)$$

Daraus folgen der Umfang der Elektronenkreisbahn um das Proton und der Umfang des Elektrons [4] mit

$$2a_0\pi = \lambda_c / \alpha \text{ und}$$

$$2r_e\pi = \alpha \cdot \lambda_c$$

5. Der Vergleich von Ry mit λ_c führt zu:

$$Ry \cdot \lambda_c = 2,6626 \cdot 10^{-5} = \frac{\alpha^2}{2} \quad (12)$$

Daraus folgt für die Rydbergkonstante die bekannte Gleichung

$$Ry = \frac{\alpha^2}{2\lambda_c} = \frac{m_e c \alpha^2}{2h}$$

Literatur:

- [1] SEGRÈ, E., Die großen Physiker und ihre Entdeckungen, Piper, München, 150 (2002)
- [2] SOMMERFELD, A., Gesammelte Schriften Bd. III, Zur Quantentheorie der Spektrallinien, Vieweg, Braunschweig, 172 ff. (1968),
Annalen der Physik 51, 1-94, 125-167 (1916)
- [3] BORN, M., Annalen der Physik 30, 54 (1909),
Die Naturwissenschaften 15, 269 (1932)
- [4] SCHRÖDINGER, E. und DIRAC, P.A.M. in R. Rompe u. H.J. Treder,
Elementarkonstanten und was sie bedeuten, Akademie-Verlag, Berlin, 57 und 80
(1988)

Des weiteren war sehr nützlich das Standardwerk von SOMMERFELD, A., Atombau und Spektrallinien, Vieweg, Braunschweig, 1924.