Über die Quantengravitation

Rolf Austrup, Hofheim am Taunus 15. Juli 2011

Zum Thema Quantengravitation erwähnt HAWKING 1988 in seinem Buch "Eine kurze Geschichte der Zeit/Die Suche nach der Urkraft des Universums" [1] :
"Heute beschreibt die Physik das Universum an Hand zweier grundlegender Teiltheorien: der allgemeinen Relativitätstheorie und der Quantenmechanik. Die allgemeine Relativitätstheorie beschreibt die Schwerkraft und den Aufbau des Universums im Großen....Die Quantenmechanik dagegen beschäftigt sich mit Erscheinungen in Bereichen von außerordentlich geringer Ausdehnung....Eine der Hauptanstrengungen in der heutigen Physik gilt der Suche nach einer neuen Theorie, die beide Teiltheorien enthält - nach einer Quantentheorie der Gravitation."
Des weiteren liest man beispielsweise bei KIEFER 2009 [2], dass auch heute noch die Konstruktion einer Quantentheorie der Gravitation als ungelöstes Problem gilt. (Weitere Autoren siehe Literatur-Hinweise).

Im Folgenden wird die Ableitung einer Gleichung für die Quantengravitation unter Einbeziehung des Planckschen Wirkungsquantums - h - als Repräsentant der Quantenmechanik und der Lichtgeschwindigkeit - c - als Repräsentant der allgemeinen Relativitätstheorie beschrieben.

1) Das Verhältnis von Coulombkraft zur Gravitationskraft

Wir wollen uns zunächst mit 2 Gleichungen der Kräfte zwischen Proton und Elektron im Wasserstoffatom befassen. Es sind dies die

Newtonsche Gravitationskraft $F_{G(ep)} = G \cdot m_e m_p / r^2$

und die Coulombkraft $F_c = e^2 / 4\pi\epsilon_0 r^2$

Aus beiden Gleichungen folgt [3]

$$\frac{F_c}{F_{G(ep)}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot G(m_e m_p)} = 2{,}28 \cdot 10^{39}$$

Mit $e^2/4\pi\epsilon_0 = \alpha\hbar c$ und der Planckschen Maßeinheit für die Masse $m_{Pl} = \sqrt{c\hbar/G}$ ist dann

$$\frac{F_c}{F_{G(ep)}} = \frac{\alpha\hbar c}{G} \cdot \frac{1}{m_e m_p} = \frac{\alpha \cdot m_{Pl}^2}{m_e m_p} \quad \text{und weiter} \qquad (1)$$

$$\frac{F_c}{F_{G(ep)}} \cdot m_e m_p = \alpha \cdot m_{Pl}^2 = 3{,}4581 \cdot 10^{-18} [kg^2] = \text{Const.} \qquad (1a)$$

für $m_e m_p$, m_e^2 , m_p^2 und die entsprechenden Verhältnisse der Coulomb- und Gravitationskräfte.

Mit Gl. (1) haben wir nur das Verhältnis von Coulomb- zu Gravitationskraft beschrieben.

Unsere Zielsetzung ist aber eine Gleichung für die Quantengravitation allein.

2) Die Quantisierung der Gravitationskraft

Die Gravitationskraft F_G für m_e und m_p im Bohrschen Wasserstoffatom mit der Strecke r ist mit Newton

$$F_G = G \frac{m_e m_p}{r^2} \qquad (2a)$$

Mit Bohr ist r = $n^2 a_0$. Es ist dann für den angeregten Zustand

$$F_{G(n)} = G \frac{m_e m_p}{n^4 a_0^2} = 3{,}6310 \cdot 10^{-47} \cdot \frac{1}{n^4} \quad \text{N} \qquad (2b)$$

Damit haben wir die Quantisierung der Gravitationskraft eingeführt. F_G wird mit wachsender Quantenzahl n um den Faktor $1/n^4$ kleiner.

n	1	2	3
$1/n^4$	1	1/16	1/81
$F_{G(n)} \cdot 10^{-47}$	3,6310	0,2269	0,0448

Danach kann die Gravitationskraft mit n = 1,2,3... nur ganz bestimmte diskrete Werte $F_{G(n)}$ annehmen.

Für n → ∞ entsprechend der Ionisierungsgrenze geht die Gravitationskraft gegen Null.

3) Eine Gleichung für die Quantengravitationskraft

Wir eliminieren a_0^2 in Gl. (2b) durch $(\hbar / \alpha m_e c)^2$, abgeleitet aus dem 1. Bohrschen Postulat $2\pi r_n \cdot m \cdot v = n \cdot h$, und führen hiermit das Plancksche Wirkungsquantum h und die Lichtgeschwindigkeit c ein.

$$F_{G(ep)} = G\frac{m_e m_p}{n^4 a_0^{\ 2}}$$

$$\downarrow\ a_0^{\ 2} = (\hbar/\alpha m_e c)^2$$

$$\boxed{F_{G(ep)} = G\frac{c^2}{\hbar^2}\cdot\frac{\alpha^2 m_e^{\ 3} m_p}{n^4}\ \mathrm{N}} \tag{3}$$

Damit haben wir eine Gleichung für die Quantengravitation zwischen Elektron und Proton mit den geforderten Parametern:
G und c als Repräsentanten der allgemeinen Relativitätstheorie und
h als Repräsentant der Quantenmechanik.
Der Zahlenwert für die Gravitationskraft zwischen Proton und Elektron ist dann mit n = 1
$F_G = 3{,}6310\cdot 10^{-47}$ N, identisch mit Gl. (2b).

4) Die Quantengravitation im Makrokosmos

Wir verlassen den Mikrokosmos und wenden uns dem Makrokosmos zu. Mit dem Newtonschen Gravitationsgesetz (2a), den Massen m_1 und m_2 und der Strecke R ist

$$F_G = G\frac{m_1 m_2}{R^2} \tag{4}$$

Wir führen einen spezifischen Streckenfaktor f_R ein, der die Länge R in Einheiten des Bohrschen Atomradius a_0 angibt:
$f_R = R/a_0$. Es ist dann

$$F_G = G\frac{m_1 m_2}{f_R^{\ 2} a_0^{\ 2}} \tag{4a}$$

Mit Einführung der Quantisierung des Bohrschen Wasserstoff-Atoms folgt

$$F_{G(m_1 m_2)} = G\frac{m_1 m_2}{f_R^{\ 2}\cdot n^4 a_0^{\ 2}} \tag{4b}$$

und mit $a_0^{\ 2} = (\hbar/\alpha m_e c)^2$

$$F_{G(m_1 m_2)} = G\frac{c^2}{\hbar^2}\cdot\frac{\alpha^2 m_e^2 m_1 m_2}{f_R^{\,2}\cdot n^4} \quad \text{N} \tag{4c}$$

Im Planeten-System ändert sich nach dem 1. Keplerschen Gesetz der Fahrstrahl R mit der Zeit t.
Für den Umlauf des Planeten erhalten wir ständig sich ändernde Werte $R(t_1), R(t_2)$ .....und damit
Augenblickswerte des spezifischen und nunmehr zeitabhängigen Streckenfaktors $f_{R(t)} = R_t/a_0$.
Für die Quantengravitation gilt dann

$$\boxed{F_{G(m_1 m_2, t)} = G\frac{c^2}{\hbar^2}\cdot\frac{\alpha^2 m_e^2 m_1 m_2}{f_{R(t)}^{\,2}\cdot n^4} \quad \text{N}} \tag{5}$$

Wir betrachten beispielhaft das Planetensystem Erde - Mond mit den Massen

$m_E = 5{,}974\cdot 10^{24}\,kg$ und
$m_M = 7{,}350\cdot 10^{22}\,kg$ und einem mittleren Radius
$R_{EM} = 3{,}84403\cdot 10^{8}\,m$.

Die Gravitationskraft nach Newton ist dann

$$F_{G(EM)} = G\cdot m_E\cdot m_M / R_{EM}^{\,2} = 1{,}98\cdot 10^{20} \quad \text{N} \tag{6}$$

Mit Gl. (5), n = 1 und $f_{R(t_1)}^{\,2} = (R_{EM}/a_0)^2 = 5{,}2770\cdot 10^{37}$
für R zur Zeit t_1 erhalten wir dann plausibel dasselbe Ergebnis wie (6):

$$F_{G(EM, t_1)} = G\frac{c^2}{\hbar^2}\cdot\frac{\alpha^2 m_e^2 m_E m_M}{f_{R(t_1)}^{\,2}\cdot n^4} = 1{,}98\cdot 10^{20} \quad \text{N} \tag{7}$$

Zur Zeit t_2 mit $R_{max} = 4{,}0674\cdot 10^{8}\,m$ und t_3 mit $R_{min} = 3{,}5641\cdot 10^{8}\,m$
und $f_{R(t_2)}^{\,2} = (R_{max}/a_0)^2 = 5{,}9080\cdot 10^{37}$ und $f_{R(t_3)}^{\,2} = (R_{min}/a_0)^2 = 4{,}5364\cdot 10^{37}$
ergeben die Quantengravitationskräfte mit (7) die Zahlenwerte

$F_{G(t_2)} = 1{,}77\cdot 10^{20}/n^4$

$F_{G(t_3)} = 2{,}30\cdot 10^{20}/n^4$

5) Der Energiezustand

Die Gravitationsenergien E_G für die Strecken $n^2 a_0$ und R sind

im Mikrokosmos

$$F_{G(ep)} = G\frac{c^2}{\hbar^2}\cdot\frac{\alpha^2 m_e^3 m_p}{n^4}$$

multipliziert mit $n^2 a_0 = n^2\hbar/\alpha m_e c$:

$$\boxed{E_{G(ep)} = G\frac{c}{\hbar}\cdot\frac{\alpha m_e^2 m_p}{n^2} \text{ J}}$$

(8)

im Makrokosmos

$$F_{G(m_1 m_2, t)} = G\frac{c^2}{\hbar^2}\cdot\frac{\alpha^2 m_e^2\cdot m_1 m_2}{f_{R(t)}^2\cdot n^4}$$

multipliziert mit $R_t = f_{R(t)}\cdot n^2 a_0 = f_{R(t)}\cdot n^2\hbar/\alpha m_e c$:

$$\boxed{E_{G(m_1 m_2, t)} = G\frac{c}{\hbar}\cdot\frac{\alpha m_e\cdot m_1 m_2}{f_{R(t)}\cdot n^2} \text{ J}}$$

(9)

Die Zahlenwerte der Gravitationsenergien mit n = 1 sind dann
für den Mikrokosmos mit Elektron und Proton:

$E_{G(ep)} = 1{,}92\cdot 10^{-57}$ J (8a)

für den Makrokosmos mit m_E und m_M und $f_{R,EM} = R_{EM}/a_0 = 7{,}2643\cdot 10^{18}$

$E_{G(EM)} = 7{,}62\cdot 10^{28}$ J. (9a)

6) <u>Die Quantisierung der Coulombkraft und die Gesamtenergie des Elektrons</u>

Die Quantisierung der Coulombkraft ist ein wesentlicher Bestandteil der Theorie des Bohrschen Atommodells und besagt: r = $n^2 a_0 / Z$.

Für die Gesamtenergie des Elektrons folgt mit Bohr

E = - $\dfrac{m_e e^4 Z^2}{8 \epsilon_0^2 h^2 n^2}$ = - $2{,}18 \cdot 10^{-18}$ J für Z und n = 1.

Wir finden im folgenden einen anderen Weg, um zur Gesamtenergie des Elektrons zu kommen und beginnen mit der Coulombkraft

$$F_C = \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 r^2}$$

Mit $r^2 = n^4 a_0^2$, $e^2 / 4 \pi \epsilon_0 = \alpha \hbar c$ und $a_o = \hbar / \alpha m_e c$

erhält man mit den bereits bekannten Durchrechnungen

$$\boxed{\begin{aligned} F_{c(n)} &= \frac{\alpha^3 m_e^2 c^3}{n^4 \hbar} = 8{,}2 \cdot 10^{-8} \text{ N} \quad \text{und} \\ E_{c(n)} &= \frac{\alpha^2 m_e c^2}{n^2} = 4{,}36 \cdot 10^{-18} \text{ J} \end{aligned}}$$

(10)

(11)

Es ist bemerkenswert, dass letzte Gleichung die Form der Einsteinschen Energiegleichung E = $m \cdot c^2$ enthält.

Außerdem ist der Zahlenwert von $E_{c(n)}$ mit $4{,}36 \cdot 10^{-18}$ exakt der doppelte Wert der Gesamtenergie E des Elektrons mit $2{,}18 \cdot 10^{-18}$. Es folgt dann

$F_{c(n)} \cdot n^2 a_0 = E_{c(n)} = 2 \cdot (-E)$ und

$-E = \dfrac{F_{c(n)} \cdot n^2 a_0}{2}$ bzw.

$$\boxed{-E = \frac{F_c \cdot a_0}{2 n^2}}$$

(12)

in Übereinstimmung mit dem Ergebnis des Bohrschen Atommodells.

7) Die kleinste Gravitationskraft

Auf der Suche nach der theoretisch kleinsten Gravitationskraft im Rahmen des Bohrschen Atommodells mit sinnvollen Größen für Masse und Länge kommen wir zu

$$\boxed{F_{G(ee)} = G\frac{m_e^2}{n^4 a_0^2} = G\frac{c^2}{\hbar^2}\cdot\frac{\alpha^2 m_e^4}{n^4} = 1{,}98\cdot 10^{-50}/n^4} \qquad (13)$$

Für einen möglichst kleinen Zähler wird die Masse des Elektrons m_e gewählt, für einen großen Nenner der Bohrsche Atomradius a_0 . Die Wahl dieser beiden Größen ist angenähert zutreffend für das Helium-Atom mit zwei Elektronen, die im klassischen Modell auf einem Kreis mit r = $2{,}5\cdot 10^{-11}$ m den Kern umlaufen [6]. Damit ist r von der Größenordnung $a_0 = 5{,}29\cdot 10^{-11}$ m.

Für die kleinste Energie gilt dann

$E_{G(ee)} = G\frac{m_e^2}{n^2 a_0}$ und nach Elimination von a_0

$$\boxed{E_{G(ee)} = G\frac{c}{\hbar}\cdot\frac{\alpha m_e^3}{n^2} = 1{,}05\cdot 10^{-60}/n^2} \qquad (14)$$

Wir erhalten aus (13) und (14) durch Vergleiche mit der Planck-Kraft $F_{Pl} = c^4/G$ und der Planck-Energie $E_{Pl} = \sqrt{c^5\hbar/G}$ die Gleichungen

$$F_{G(ee)} = \alpha^2\frac{m_e^4}{m_{Pl}^4}\cdot\frac{F_{Pl}}{n^4} \quad \text{und} \qquad (15)$$

$$E_{G(ee)} = \alpha\frac{m_e^3}{m_{Pl}^3}\cdot\frac{E_{Pl}}{n^2} \qquad (16)$$

In beiden Gleichungen sind die Planckschen Einheiten für Kraft und Energie Bezugsgrößen für die Quantengravitationskraft und Quantengravitationsenergie.

8) Vergleich der Kräfte und Energien

In der Veröffentlichung "Über Plancksche Maßeinheiten..." [4] werden 2 Gleichungen formuliert, die die Planckschen Maßeinheiten mit elementaren Grundeinheiten der Atomphysik, wie m_e , m_p , λ_c , kombinieren und zu 2 Konstanten $\Phi_e = 5{,}99 \cdot 10^{22}$ und $\Phi_p = 3{,}2626 \cdot 10^{19}$ führen.
Wir benötigen für die folgenden Ausführungen die Planckschen Maßeinheiten mit der reduzierten Planck-Konstante $\hbar = h/2\pi$.
Es ist dann $m_{Pl} = \sqrt{c\hbar/G}$ usw. Wir kommen damit zu anderen Zahlenwerten für Φ_e und Φ_p und bezeichnen sie mit

$$\Phi_E = \Phi_e/\sqrt{2\pi} = 2{,}39 \cdot 10^{22} \qquad (17)$$
$$\Phi_P = \Phi_p/\sqrt{2\pi} = 1{,}30 \cdot 10^{19}$$

Bevor wir uns mit dem Vergleich der Kräfte und Energien des Wasserstoff-Atoms befassen, hier zunächst deren Zahlenwerte in der Übersicht.

$F_c = 8{,}2 \cdot 10^{-8}$ N	$F_{Pl} = c^4/G = 1{,}21 \cdot 10^{44}$ N
$F_{G(ee)} = 1{,}98 \cdot 10^{-50}$ N	$E_{Pl} = \sqrt{c^5\hbar/G} = 1{,}95 \cdot 10^9$ J
$F_{G(ep)} = 3{,}63 \cdot 10^{-47}$ N	$m_{Pl} = 2{,}17 \cdot 10^{-8} kg$
$E_{G(ee)} = 1{,}05 \cdot 10^{-60}$ J	$l_{Pl} = 1{,}61 \cdot 10^{-35} m$
$E_{G(ep)} = 1{,}92 \cdot 10^{-57}$ J	
$E = -2{,}1815 \cdot 10^{-18}$ J	

In [4] wurde das Verhältnis der ungequantelten Coulomb- und Gravitationskraft durch $\alpha \cdot \phi_e \phi_p / 2\pi = 2{,}27 \cdot 10^{39}$ beschrieben. Mit der abgeänderten Nomenklatur ϕ_E und ϕ_P und der Quantelung der Kräfte formulieren wir jetzt

$$\frac{F_{c(n)}}{F_{G(ep)}} = \frac{8{,}2 \cdot 10^{-8}}{3{,}63 \cdot 10^{-47}} = 2{,}27 \cdot 10^{39} = \alpha \cdot \phi_E \phi_P \qquad (18)$$

In den folgenden Rechenoperationen werden mit Austausch von m_e und m_p durch ϕ_E und ϕ_P die Planckschen Maßeinheiten für Kraft und Energie eingeführt.

Ausgehend von der Quantengravitationskraft (3)

$F_{G(ep)} = G\frac{c^2}{\hbar^2}\cdot\frac{\alpha^2 m_e^{\,3} m_p}{n^4}$ erhalten wir

$F_{G(ep)} = \frac{c^4}{G}\cdot\frac{\alpha^2}{\Phi_E^{\,3}\cdot\Phi_P\cdot n^4}$. Mit der Planck-Kraft c^4/G ist dann

$$\frac{F_{G(ep)}}{F_{Pl}} = \frac{\alpha^2}{\Phi_E^{\,3}\cdot\Phi_P\cdot n^4} \qquad (19)$$

Die Gleichung der Quantengravitationsenergie (8)

$E_{G(ep)} = G\frac{c}{\hbar}\cdot\frac{\alpha m_e^{\,2} m_p}{n^2}$ wird wie vorher mittels Φ_E und Φ_P umgeschrieben zu

$E_{G(ep)} = \sqrt{c^5\hbar/G}\cdot\frac{\alpha}{\Phi_E^{\,2}\cdot\Phi_P\cdot n^2}$. Zusammen mit der Planck-Energie $\sqrt{c^5\hbar/G}$ folgt

$$\frac{E_{G(ep)}}{E_{pl}} = \frac{\alpha}{\Phi_E^{\,2}\cdot\Phi_P\cdot n^2} \qquad (20)$$

Aus (18) und (19) folgt des Weiteren

$$\frac{F_{c(n)}}{F_{Pl}} = \frac{\alpha^3}{\Phi_E^{\,2}\cdot n^4} \qquad (21)$$

Die Gesamtenergie des Elektrons ist mit einer vereinfachten Gleichung [4]

$$E = -\frac{h\cdot\nu_{(n=1)}}{2n^2} = -2{,}18\cdot 10^{-18}/n^2 \qquad (22)$$

Aus dieser Gleichung sind mittels $\nu_{n=1} = \alpha\cdot c/2\pi a_0$, $a_0 = \hbar/\alpha m_e c$ und

$m_e = m_{Pl}/\Phi_E$ abzuleiten

$$\frac{-E}{E_{Pl}} = \frac{\alpha^2}{2\Phi_E\cdot n^2} \quad \text{und} \qquad (23)$$

$$\frac{-E}{E_{G(ep)}} = \frac{\alpha\cdot\Phi_E\cdot\Phi_P}{2} \qquad (24)$$

Wir sehen, dass die hier abgeleiteten Relationen von Kräften und Energien auf einfachste Weise nur durch die 3 Konstanten α , Φ_E und Φ_P beschrieben werden können.

9) **Das Verknüpfungsschema**

In diesem Schema werden die Quantengravitationskraft F_G und die Quantengravitationsenergie E_G von Elektron und Proton mit den Planckschen Maßeinheiten für Kraft F_{Pl} und Energie E_{Pl} verknüpft.

$$\begin{tikzcd}
 & F_{G(ep)} \arrow[r, ".\, n^2 a_0"] \arrow[dd, ".\, \phi_E^3 \phi_P n^4/\alpha^2"] & E_{G(ep)} \arrow[dr, ".\, \alpha \phi_E \phi_P/2"] \arrow[dd, "\phi_E^2 \phi_P n^2/\alpha"] & \\
.\, F_{c(n)} \arrow[ur, ":\alpha \phi_E \phi_P"] \arrow[dr, ".\, \phi_E^2 n^4/\alpha^3"'] & & & -E \\
 & F_{Pl} \arrow[r, ".\, l_{Pl}"'] & E_{Pl} \arrow[ur, ".\, \alpha^2/2\phi_E n^2"'] &
\end{tikzcd} \qquad (25)$$

Ausgangspunkt ist die gequantelte Coulombkraft $F_{c(n)}$, die wir mit Gl. (1) oder (10) einsetzen.
Alle Verknüpfungsfaktoren sind dem vorliegenden Text zu entnehmen.
Am Ende des Schemas steht die Gesamtenergie des Elektrons E.

Wir erhalten durch Ausmultiplizieren der oberen Horizontale

$$F_{c(n)} \cdot n^2 \frac{a_0}{2} = \frac{F_c \cdot a_0}{2n^2} = 2{,}1815 \cdot 10^{-18} = -E \qquad (26)$$

Über die untere Horizontale kommen wir zu demselben Ergebnis (hier ist zu beachten:
$\phi_E = \lambda_c/2\pi \cdot l_{Pl}$ und $\lambda_c/2\pi\alpha = a_0$) mit

$$F_{c(n)} \cdot \frac{\phi_E^2 n^4}{\alpha^3} \cdot l_{Pl} \cdot \frac{\alpha^2}{2\Phi_E \cdot n^2} = F_{c(n)} \cdot n^2 \frac{a_0}{2} = -E \qquad (27)$$

Literatur:

[1] ST. W. HAWKING: Eine kurze Geschichte der Zeit/
Die Suche nach der Urkraft des Universums, Rowohlt, 26 (1988)

[2] C. KIEFER: Der Quantenkosmos, S. Fischer, 219 ff. (2009)

[3] W. FINKELNBURG: Einführung in die Atomphysik,
Springer-Verlag Berlin, 339 (1976)

[4] Rolf Austrup: Über Plancksche Maßeinheiten und die Verknüpfung von Naturkonstanten im Rahmen des Bohrschen Atommodells; www.austrup-rolf.de

[5] Siehe auch:
M. BOJOWALD: Zurück vor den Urknall, S. Fischer (2009).
Eine Rezension der aktuellen Literatur durch
U. v. RAUCHHAUPT in Frankfurter Allgemeine
Sonntagszeitung, 55 (26.4.2009)

[6] W. DEMTRÖDER, Experimentalphysik 3, 218 (2000)

[7] ibd. 105

Ergänzung zur vorstehenden Veröffentlichung

31. März 2012

Mit Einführung der Bahngeschwindigkeit des Elektrons $v_e = \alpha \cdot c$ auf der 1. Bohrschen Bahn des Wasserstoffatoms kommen wir zu vereinfachten Gleichungen der vorab beschriebenen Kräfte und Energien.

$$F_{G(ep)} = G\frac{c^2}{\hbar^2}\cdot\frac{\alpha^2 m_e^3 m_p}{n^4} \quad (3) \xrightarrow{\alpha \cdot c = v_e} \quad F_{G(ep)} = G\frac{m_e^3 m_p}{\hbar^2 n^4}\cdot v_e^2 \qquad (28)$$

$$E_{G(ep)} = G\frac{c}{\hbar}\cdot\frac{\alpha m_e^2 m_p}{n^2} \quad (8) \longrightarrow \quad E_{G(ep)} = G\frac{m_e^2 m_p}{\hbar n^2}\cdot v_e \qquad (29)$$

$$F_{c(n)} = \frac{\alpha^3 m_e^2 c^3}{\hbar n^4} \quad (10) \longrightarrow \quad F_{c(n)} = \frac{m_e^2}{\hbar n^4}\cdot v_e^3 \qquad (30)$$

$$E_{c(n)} = \frac{\alpha^2 m_e c^2}{n^2} \quad (11) \longrightarrow E_{c(n)} = \frac{m_e v_e^{\,2}}{n^2} \quad (31)$$

$$E = -\frac{F_c \cdot a_o}{2n^2} \quad (12) \longrightarrow \mathbf{E = -\frac{m_e v_e^{\,2}}{2n^2}} \quad (32)$$

Damit werden alle Gleichungen der Kräfte und Energien auf die Bahngeschwindigkeit v_e bezogen. Dasselbe gilt für die entsprechenden Gleichungen des Makrokosmos.

Die Gesamtenergie des Elektrons ist jetzt wesentlich einfacher zu formulieren mit $E = - m_e v_e^{\,2}/2n^2$ im Gegensatz zu $E = - m_e e^4 Z^2/8\epsilon_o^{\,2} h^2 n^2$ (s. Kap. 6).